Nimmt man an, daß die Konvektionsströme für alle Versuche von ähnlicher Größenordnung waren, so fällt ihr störender Einfluß um so stärker ins Gewicht, je geringer der Stofftransport durch Diffusion ist; dies ist besonders bei den tieferen Arbeitstemperaturen der Fall. Allerdings zeigen die aus dem Dampfraum entnommenen Proben, daß eine Trennung innerhalb der Gasphase tatsächlich stattfindet.

Kinetische Gleichungen und Integrabilitätsbedingung im Vielzeitenformalismus

D. Frank *, D. Pfirsch und S. Priess

Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München

(Z. Naturforschg. **20 a**, 147—150 [1965]; eingegangen am 2. November 1964)

An Hand einer Klasse gewöhnlicher Differentialgleichungen und eingehender an Hand eines speziellen Beispieles wird das Vielzeitenverfahren als eine Lösungsmethode der B B G K Y - Gleichungen diskutiert. Insbesondere werden ein von Sandri und ein von Su vorgeschlagener Ansatz für die Berechnung von Korrekturen zur Landau-Gleichung auf ihren Anwendungsbereich hin untersucht.

Die BBGKY-Gleichungen eines einatomigen Gases lauten im Falle schwacher Wechselwirkung, d. h. für kleine mittlere potentielle Energie im Vergleich zur mittleren Energie der ungeordneten Bewegung (ihr Verhältnis wird mit ε bezeichnet, $\varepsilon \ll 1$) und für eine Reichweite der Kräfte, die nicht wesentlich größer als der mittlere Teilchenabstand ist

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} + K_s F_s = \varepsilon I_s F_s + \varepsilon L_s F_{s+1}; \tag{1}$$

dabei ist $F_s = F_s(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_s;\ \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_s;\ t;\ \varepsilon)$ die s-Teilchen-Verteilungsfunktion und K_s, I_s, L_s sind die folgenden Operatoren:

$$K_s = \sum_{i=1}^{s} \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i}; \tag{2}$$

$$I_s = \sum_{1 \leq i < j \leq s} I_{ij}; \quad I_{ij} = \frac{\partial U(\boldsymbol{x}_{ij})}{\partial \boldsymbol{x}_i} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_i} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_j}\right); \tag{3}$$

$$L_s = \sum_{i=1}^{s} L_{i,\,s+1};$$
$$L_{i,\,s+1} = \int \mathrm{d}x_{s+1}\, \mathrm{d}v_{s+1} \frac{\partial U(\boldsymbol{x}_{i,\,s+1})}{\partial \boldsymbol{x}_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_i};$$
$$\boldsymbol{x}_{ij} = \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j. \tag{4}$$

U ist das Wechselwirkungspotential zweier Teilchen mit dem maximalen Wert 1. Der Ort ist in Einheiten der Reichweite der Kräfte, die Geschwindigkeit in Einheiten der mittleren ungeordneten Geschwindigkeit und die Zeit in Einheiten der mittleren Dauer der Wechselwirkung zweier Teilchen gemessen. In der vorliegenden Arbeit soll eine Lösungsmethode für diese Gleichungen untersucht werden, die auf die grundlegenden Überlegungen Bogoljubow's [1] zurückgeht, und die durch Frieman, Sandri und Mitarbeiter [2–5] auf eine mathematisch durchsichtigere Form gebracht wurde: Die Verteilungsfunktionen F_s werden in geeigneter Weise als Funktionen F_s $(\boldsymbol{x}_1, \dots;\ \boldsymbol{v}_1, \dots;\ t,\ \varepsilon t,\ \varepsilon^2 t, \dots)$ dargestellt. Auf diese Weise kann man mit $\tau_\nu = \varepsilon^\nu t$ neue Zeitvariable τ_ν einführen. Indem man diese τ_ν dann als voneinander unabhängig betrachtet, werden die Funktionen F_s zu Funktionen über dem ganzen τ_ν-Raum fortgesetzt. Auf die so erweiterten Funktionen F_s wird Störungsrechnung nach ε angewandt:

$$F_s = F_s^{\,0} + \varepsilon F_s^{\,1} + \varepsilon^2 F_s^{\,2} + \dots, \tag{5}$$
$$F_s^{\,\nu} = F_s^{\,\nu}(\boldsymbol{x}_1, \dots;\ \boldsymbol{v}_1, \dots;\ \tau_0, \tau_1, \dots).$$

* Unser Freund D. Frank ist kurz vor Abschluß dieser Arbeit am 23. 2. 1964 gestorben.

[1] N. N. Bogoljubow, Studies in Statistical Mechanics, Vol. 1, Edited by J. Deboer and G. E. Uhlenbeck, North Holland Publishing Co., Amsterdam 1962.

[2] E. A. Frieman, Princeton University, Proj. Matt. Rep. Matt. — 106, 1961.

[3] E. A. Frieman, J. Math. Phys. 4, 411 [1963].

[4] G. Sandri, The Foundations of Nonequilibrium Statistical Mechanics, Lecture Notes, Rutgers University 1961—1962.

[5] C. H. Su, Kinetic Theory of Weakly Coupled Gases, Thesis in the Department of Aeronautical Engineering, Princeton University 1964.

Man erhält auf diese Weise aus der BBGKY-Hierarchie folgendes Gleichungssystem bis zur dritten Ordnung:

$$\frac{\partial F_s^0}{\partial \tau_0} + K_s F_s^0 = 0 , \qquad (6)$$
$$\frac{\partial F_s^0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial F_s^1}{\partial \tau_0} + K_s F_s^1 = I_s F_s^0 + L_s F_{s+1}^0 ,$$
$$\frac{\partial F_s^0}{\partial \tau_2} + \frac{\partial F_s^1}{\partial \tau_1} + \frac{\partial F_s^2}{\partial \tau_0} + K_s F_s^2 = I_s F_s^1 + L_s F_{s+1}^1 ,$$
$$\frac{\partial F_s^0}{\partial \tau_3} + \frac{\partial F_s^1}{\partial \tau_2} + \frac{\partial F_s^2}{\partial \tau_1} + \frac{\partial F_s^3}{\partial \tau_0} + K_s F_s^3 = I_s F_s^2 + L_s F_{s+1}^2 .$$

Insbesondere ergibt sich für die 1-Teilchenfunktion im Falle, daß $F_s^0 = \prod_{\nu=1}^{s} F_1^0(\nu)$ zur Zeit $\tau_0 = 0$ gilt:

$$\frac{\partial F_1^0}{\partial \tau_0} = 0 ,$$
$$\frac{\partial F_1^0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial F_1^1}{\partial \tau_0} = 0 ,$$
$$\frac{\partial F_1^0}{\partial \tau_2} + \frac{\partial F_1^1}{\partial \tau_1} + \frac{\partial F_1^2}{\partial \tau_0} = L_1 F_2^1, \qquad (7)$$
$$\frac{\partial F_1^0}{\partial \tau_3} + \frac{\partial F_1^1}{\partial \tau_2} + \frac{\partial F_1^2}{\partial \tau_1} + \frac{\partial F_1^3}{\partial \tau_0} = L_1 F_2^2.$$

Es wird nach Lösungen gefragt, bei denen keine „säkularen Terme“ vorhanden sind. „Säkulare Terme“ sind formal durch Auftreten von positiven Potenzen in den τ_ν erklärt.

Wie man an den Gleichungen sieht, bekommt man für ein und dieselbe Funktion Gleichungen mit Ableitungen nach verschiedenen Variablen τ_ν. Es besteht daher die Frage, ob die Verträglichkeit dieser Differentialgleichungen gleichzeitig mit der Forderung nach Säkularitätenfreiheit zu erfüllen ist. Das Problem ergibt sich hier, sobald man über die zweite Ordnung hinausgeht, d. h. sobald man Korrekturen zur sogenannten LANDAU-Gleichung [1, 4] angeben will.

Um Einblick in den mathematischen Formalismus zu bekommen, wird im folgenden in Analogie zu den Hierarchiegleichungen eine Klasse gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung diskutiert.

Der Vielzeitenformalismus für eine Klasse gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung

a) Allgemeiner Formalismus

Die betrachtete Klasse von Differentialgleichungen wird durch

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = g(x, \varepsilon) \qquad (8)$$

beschrieben, wobei weitere Forderungen an g noch folgen. Entsprechend der Störungsrechnung im Vielzeitenformalismus hat man für x die Entwicklung

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu x^\nu \quad \text{mit } x^\nu = x^\nu(\tau_0, \tau_1, \ldots). \qquad (9)$$

Die Funktionen $g(\sum \varepsilon^\nu x^\nu, \varepsilon)$ sollen bezüglich ε in eine TAYLOR-Reihe entwickelbar sein:

$$\begin{aligned} g(x, \varepsilon) &= g(x^0, 0) + \varepsilon(g_\varepsilon + x^1 g_x) \qquad (10)\\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2}(g_{\varepsilon\varepsilon} + 2x^1 g_{x\varepsilon} + (x^1)^2 g_{xx} + 2x^2 g_x)\\ &+ \frac{\varepsilon^3}{6}(g_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} + 3x^1 g_{x\varepsilon\varepsilon} + 3(x^1)^2 g_{xx\varepsilon} + 6x^2 g_{x\varepsilon}\\ &+ (x^1)^3 g_{xxx} + 6x^1 x^2 g_{xx} + 6x^3 g_x) + \varepsilon^4 \ldots . \end{aligned}$$

Zur Abkürzung bezeichneten wir $g_\varepsilon|_{\varepsilon=0}$, $g_x|_{\varepsilon=0}, \ldots$ mit g_ε, $g_x, \ldots$. Um Gleichungen zu erhalten, die ein ähnliches Aussehen haben wie die Hierarchiegleichungen (7) für die 1-Teilchenfunktion, wird gefordert:

$$\frac{\partial x^0}{\partial \tau_0} = 0 , \quad \frac{\partial x^0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial x^1}{\partial \tau_0} = 0 . \qquad (11)$$

Wie man an der ε-Entwicklung von g erkennt, bedeutet das:

$$g(x^0, 0) = 0 \quad \text{und} \quad g_\varepsilon(x^0, 0) = 0 .$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} g(x, \varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = 0 ,$$
$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} g_\varepsilon(x, \varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = 0 , \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (12)$$

Wir betrachten also Funktionen g von der Form:

$$g(x, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2} g_{\varepsilon\varepsilon} + \frac{\varepsilon^3}{6}(g_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} + 3x^1 g_{x\varepsilon\varepsilon}) + \varepsilon^4 \ldots . \qquad (13)$$

Bis zur dritten Ordnung in ε erhält man im Vielzeitenformalismus folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial x^0}{\partial \tau_0} = 0 , \qquad (14)$$
$$\frac{\partial x^0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial x^1}{\partial \tau_0} = 0 , \qquad (15)$$
$$\frac{\partial x^0}{\partial \tau_2} + \frac{\partial x^1}{\partial \tau_1} + \frac{\partial x^2}{\partial \tau_0} = \tfrac{1}{2} g_{\varepsilon\varepsilon} , \qquad (16)$$
$$\frac{\partial x^0}{\partial \tau_3} + \frac{\partial x^1}{\partial \tau_2} + \frac{\partial x^2}{\partial \tau_1} + \frac{\partial x^3}{\partial \tau_0} = \tfrac{1}{6} g_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} + \tfrac{1}{2} x^1 g_{x\varepsilon\varepsilon} . \qquad (17)$$

Dieses System von partiellen Differentialgleichungen wird gelöst für die Anfangsbedingung, daß zur Zeit $t = 0$, d. h. für alle $\tau_\nu = 0$, alle Funktionen x^ν,

$\nu \geqq 0$, bekannt sind, und zwar unter der Bedingung, daß im Sinne der Definition nach Gl. (7) keine säkularen Terme auftreten:

Aus (14) folgt, daß x^0 unabhängig von τ_0 ist, also

$$x^0 = x^0(\tau_1, \tau_2, \ldots), \tag{18}$$

damit ergibt sich aus (15) weiter

$$x^0 = x^0(\tau_2, \tau_3, \ldots), \quad x^1 = x^1(\tau_1, \tau_2, \ldots) \quad (19), (20)$$

und aus (16) schließlich

$$x^2 = x^2(\tau_1, \tau_2, \ldots), \tag{21}$$

$$\frac{\partial x^0}{\partial \tau_2} + \frac{\partial x^1}{\partial \tau_1} = \tfrac{1}{2} g_{\varepsilon\varepsilon}, \tag{22}$$

woraus man nach Integration über τ_1 erhält

$$x^1 = x^1(\tau_2, \tau_3, \ldots), \quad \frac{\partial x^0}{\partial \tau_2} = \tfrac{1}{2} g_{\varepsilon\varepsilon}. \quad (23), (24)$$

(24) entspricht gerade der normalen kinetischen Gleichung bei der Lösung der Hierarchiegleichungen. Aus (17) folgt jetzt weiter

$$x^3 = x^3(\tau_1, \tau_2, \ldots), \tag{25}$$

$$\frac{\partial x^0}{\partial \tau_3} + \frac{\partial x^1}{\partial \tau_2} + \frac{\partial x^2}{\partial \tau_1} = \tfrac{1}{6} g_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} + \tfrac{1}{2} x^1 g_{x\varepsilon\varepsilon}, \tag{26}$$

und somit nach Integration über τ_1

$$x^2 = x^2(\tau_2, \tau_3, \ldots), \tag{27}$$

$$\frac{\partial x^0}{\partial \tau_3} + \frac{\partial x^1}{\partial \tau_2} = \tfrac{1}{6} g_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} + \tfrac{1}{2} x^1 g_{x\varepsilon\varepsilon}. \tag{28}$$

Aus der Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Ableitungen von x^0 nach τ_2 und τ_3 erhält man für x^1 als Funktion von τ_2 eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Es ist nämlich

$$\frac{\partial^2 x^0}{\partial \tau_3 \, \partial \tau_2} = \tfrac{1}{2} g_{\varepsilon\varepsilon x} \frac{\partial x^0}{\partial \tau_3} = \tfrac{1}{2} g_{\varepsilon\varepsilon x} \left(\tfrac{1}{6} g_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} + \tfrac{1}{2} x^1 g_{x\varepsilon\varepsilon} - \frac{\partial x^1}{\partial \tau_2} \right) \tag{29}$$

und

$$\frac{\partial^2 x^0}{\partial \tau_2 \, \partial \tau_3} = - \frac{\partial^2 x^1}{\partial \tau_2^2} + \tfrac{1}{6} g_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon x} \tfrac{1}{2} g_{\varepsilon\varepsilon} + \tfrac{1}{2} \frac{\partial x^1}{\partial \tau_2} g_{x\varepsilon\varepsilon} + \tfrac{1}{4} x^1 g_{xx\varepsilon\varepsilon} g_{\varepsilon\varepsilon} \tag{30}$$

und damit

$$\frac{\partial^2 x^1}{\partial \tau_2^2} - g_{\varepsilon\varepsilon x} \frac{\partial x^1}{\partial \tau_2} + \tfrac{1}{4} (g_{\varepsilon\varepsilon x}^2 - g_{\varepsilon\varepsilon} g_{x x\varepsilon\varepsilon}) x^1 + \tfrac{1}{12} (g_{\varepsilon\varepsilon x} g_{\varepsilon\varepsilon} - g_{\varepsilon\varepsilon} g_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon x}) = 0. \tag{31}$$

Aus der Differentialgleichung zweiter Ordnung ist unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung x^1 als Funktion von τ_2 so zu bestimmen, daß keine Säkularitäten auftreten. Dann erhält man aus (28) eine Differentialgleichung für x^0 in seiner Abhängigkeit von τ_3. SU [5] nimmt an

$$\partial x_0 / \partial \tau_3 = 0. \tag{32}$$

Hierbei ist natürlich die Integrabilitätsbedingung bezüglich τ_2 und τ_3 erfüllt. Man bestimmt $x^1(\tau_2)$ aus der aus (28) folgenden Differentialgleichung

$$\partial x^1 / \partial \tau_2 = \tfrac{1}{6} g_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} + \tfrac{1}{2} x^1 g_{x\varepsilon\varepsilon}. \tag{33}$$

Damit $x^1(\tau_2)$ frei von Säkularitäten ist, muß in diesem Fall gefordert werden:

$$\lim_{\tau_2 \to \infty} g_{x\varepsilon\varepsilon} < 0. \tag{34}$$

SANDRI [4] macht die Annahme

$$x_1 \equiv 0. \tag{35}$$

Da $x^1 \equiv 0$ dann also eine Lösung der Dgl. (20) ist, muß gelten

$$g_{\varepsilon\varepsilon x} g_{\varepsilon\varepsilon} - g_{\varepsilon\varepsilon} g_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon x} = 0, \tag{36}$$

folglich

$$g_{\varepsilon\varepsilon} = c \, g_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} \quad \text{mit} \quad c = \text{const}. \tag{37}$$

Das ist eine stark einschränkende Bedingung an die Klasse der Funktionen g, da $g_{\varepsilon\varepsilon}$ und $g_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}$ als Funktionen in x voneinander völlig unabhängig sind [6].

b) Ein Beispiel

An Hand eines speziellen Beispieles sollen die von uns angegebene, die SUsche und die SANDRIsche Methode noch einmal diskutiert werden. Es sei $g(x, \varepsilon)$ der folgende Ausdruck:

$$g(x, \varepsilon) = -\tfrac{1}{6} \varepsilon^2 (x-1)(3 + \varepsilon(1+x)). \tag{38}$$

Das ursprüngliche Problem (8) hat dann die exakte Lösung

$$x = \frac{1 + (3+\varepsilon) \, k \exp\{-(\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 + \tfrac{1}{3}\varepsilon^3)\, t\}}{1 - k\, \varepsilon \exp\{-(\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 + \tfrac{1}{3}\varepsilon^3)\, t\}}, \tag{39}$$

wobei k durch die Anfangsbedingung bestimmt ist:

$$x = \frac{1 + k(3+\varepsilon)}{1 - k\,\mathrm{e}} \quad \text{für } t = 0. \tag{40}$$

[6] Dieses Problem war von den Verfassern in einem Vortrag auf der „VI. Conférence Internationale sur les Phénomènes d'Ionisation dans les Gaz", Orsay/Frankreich, aufgegriffen worden, und zwar direkt im Rahmen der kinetischen Gleichungen bei schwacher Wechselwirkung. Dort wurde bewiesen, daß die SANDRIschen Gleichungen für $\partial f^0 / \partial \tau_2$ und $\partial f_0 / \partial \tau_3$ nicht miteinander verträglich sind. Versehentlich wurden jedoch fehlerhafte Ausgangsgleichungen benutzt, so daß jener Beweis hinfällig ist.

Nach Anwendung des Vielzeitenformalismus und der Störungsrechnung erhält man an Stelle der Gln. (24) und (31):

$$\partial x^0/\partial \tau_2 = \tfrac{1}{2}(1 - x^0) \tag{41}$$

und
$$\frac{\partial^2 x^1}{\partial \tau_2{}^2} + \frac{\partial x^1}{\partial \tau_2} + \tfrac{1}{4} x^1 - \tfrac{1}{12}(x^0 - 1)^2 = 0\,. \tag{42}$$

Aus (41) folgt für x^0 in seiner Abhängigkeit von τ_2

$$x^0 = c\, e^{-\tau_2/2} + 1, \quad c = c(\tau_3, \tau_4, \ldots), \tag{43}$$

und damit als allgemeine Lösung von (42)

$$x^1 = (a + b\,\tau_2)\, e^{-\tau_2/2} + \frac{c^2}{3}\, e^{-\tau_2}, \tag{44}$$

a, b sind Funktionen von τ_3, τ_4, ...

Da keine „Säkularitäten" auftreten sollen, muß $b = 0$ sein. Wir betrachten also nur Lösungen von der Form

$$x^1 = a\, e^{-\tau_2/2} + \frac{c^2}{3}\, e^{-\tau_2}. \tag{45}$$

So bekommen wir nach (28) als Differentialgleichung für x^0 als Funktion von τ_3

$$\partial x^0/\partial \tau_3 = -\tfrac{1}{3}\, c\, e^{-\tau_2/2}, \tag{46}$$

woraus sich über (43) eine Differentialgleichung für $c(\tau_3)$ ergibt:

$$\partial c/\partial \tau_3 = -\tfrac{1}{3}\, c\,. \tag{47}$$

Also ist

$$c = c_0\, e^{-\tau_3/3}, \quad c_0 = c_0(\tau_4, \tau_5, \ldots). \tag{48}$$

Die Funktionen c_0 und a werden aus der Anfangsbedingung (40) bestimmt, es folgt

$$c_0 = 3\,k\,, \qquad a = 2\,k\,. \tag{49}$$

Damit erhalten wir als Approximation der Lösung (39)

$$x^0 + \varepsilon\, x^1 = (1 + 3\,k\, e^{-\tau_2/2 - \tau_3/3}) + \varepsilon\,(2\,k\, e^{-\tau_2/2} + 3\,k^2\, e^{-\tau_2 - 2\,\tau_3/3}). \tag{50}$$

Diese Approximation entspricht der folgenden Entwicklung der exakten Lösung x:

$$x = (1 + (3 + \varepsilon)\, k\, e^{-(\tau_2/2 + \tau_3/3)}) \cdot (1 + k\,\varepsilon\, e^{-(\tau_2/2 + \tau_3/3)} + \ldots), \tag{51}$$

d. h. der Ausdruck für x ist wie $1/(1 - a) = 1 + a + \ldots$ mit $a = k\,\varepsilon\, e^{-(\tau_2/2 + \tau_3/3)}$ entwickelt.

Nach der Methode von Su erhält man als approximierende Lösung von (39)

$$x^0 = \gamma\, e^{-\tau_2/2} + 1, \quad \gamma = \gamma(\tau_4, \ldots) \text{ wegen } \partial x^0/\partial \tau_3 = 0, \tag{52}$$

und

$$x^1 = e^{-\tau_2/2}(\alpha - \tfrac{1}{3}\gamma^2) + \gamma^2\, e^{-\tau_2} - \tfrac{1}{3}\gamma\, \tau_2\, e^{-\tau_2/2}, \quad \alpha = \alpha(\tau_3, \tau_4, \ldots). \tag{53}$$

Aus der Anfangsbedingung (40) folgt

$$\gamma = 3\,k\,, \qquad \alpha = 2\,k + 3\,k^2. \tag{54}$$

Damit ist

$$x^0 = 3\,k\, e^{-\tau_2/2} + 1 \tag{55}$$

und

$$x^1 = 2\,k\, e^{-\tau_2/2} + 3\,k^2\, e^{-\tau_2} - k\,\tau_2\, e^{-\tau_2/2}. \tag{56}$$

In der formalen Handhabung der Säkularitätenmethode wäre der letzte Ausdruck schon nicht mehr zulässig.

Die Approximation $x^0 + \varepsilon\, x^1$ entspricht in diesem Fall folgender Entwicklung der exakten Lösung (39):

$$x = (1 + (3 + \varepsilon)\, k\, e^{-\tau_2/2}(1 - \tfrac{1}{3}\,\varepsilon\,\tau_2 + \ldots)) \cdot (1 + k\,\varepsilon\, e^{-\tau_2/2}(1 + \ldots) + \ldots). \tag{57}$$

Diese Entwicklung kann man aus der zu dem von uns angegebenen, allgemeineren Verfahren erhalten, wenn man in jener $e^{-\varepsilon\,\tau_2/3}$ für $e^{-\tau_3/3}$ schreibt und diese letzte Funktion wieder entwickelt. Die Lösung von Su führt gerade wegen des formal säkularen Termes für größere Werte von τ_3 zu einer schlechteren Approximation der exakten Lösung als das allgemeine Verfahren, während für kleinere Werte von τ_3 die Abweichungen noch unerheblich sind. Interessiert man sich also für nicht zu große Werte von τ_3, so ist die Susche Methode anwendbar und wegen ihrer vergleichsweise großen Einfachheit der allgemeinen Methode vorzuziehen.

Die Sandrische Methode ist für das hier betrachtete Beispiel nicht anwendbar, da die Bedingung (37) nicht erfüllt ist. Man erhielte nach Sandri:

$$\partial x^0/\partial \tau_2 = \tfrac{1}{2}(1 - x^0), \tag{58}$$

woraus folgt

$$x^0 = c\, e^{-\tau_2/2} + 1, \quad c = c(\tau_3, \tau_4, \ldots), \tag{59}$$

und
$$\partial x^0/\partial \tau_3 = \tfrac{1}{6}(1 - (x^0)^2), \tag{60}$$

damit
$$\partial c/\partial \tau_3 = -\tfrac{1}{6}\, c^2\, e^{-\tau_2/2} - \tfrac{1}{3}\, c\,. \tag{61}$$

Diese Art der τ_2-Abhängigkeit von c kann innerhalb der τ_3-Skala aber nicht mehr vernachlässigt werden.